Exercices et problèmes

34 Résoudre dans $\mathbb{Z}$,

a. $x^2 \equiv 4 \pmod{11}$.

b. $x^2 \equiv -1 \pmod{11}$.

c. $x^2 \equiv -2 \pmod{11}$.

35 Déterminer tous les entiers a et b tels que $ab \equiv -2 \pmod{8}$.

36 Résoudre dans $\mathbb{Z}$,

a. $x^2 + 6x + 5 \equiv 0 \pmod{7}$.

b. $x^2 - 4x + 3 \equiv 0 \pmod{8}$.

37 1. Vérifier que $10^{20} \equiv 1 \pmod{11}$.

2. En déduire le reste modulo 11 de 99999999999999999995.

38 Déterminer le reste modulo 103 de $10^{102} + 3 \times 10^{204} + 106 \times 10^{612}$.

39 Soit x un entier naturel.

1. Vérifier que $x\left(x^4 - 1\right) \equiv 0 \pmod{5}$. En déduire le reste modulo 5 de $\left(x^4 - x^2\right)\left(x^2 + 1\right)$.

2. Vérifier que $x\left(x^6 - 1\right) \equiv 0 \pmod{7}$. En déduire le reste modulo 7 de $\left(x^8 - x^5\right)\left(x^3 + 1\right)$.

40 Soit p un nombre premier et a un entier naturel non divisible par p. Déterminer les restes modulo p de a^{p-1}, $a^{p-1} - 2$ et $2a^{10p-10} - 3$.

41 1. Soit un entier $n \geq 0$.

a. Déterminer le reste modulo 111 de 1000.

b. Montrer que les restes modulo 111 de n et 1000n sont égaux.

c. En déduire, sans utiliser la calculatrice, que chacun des nombres 111111, 100010001 et 100010000001 est divisible par 111.

2. Démontrer que 1001001001001 est divisible par 11111.

42 Soit n un entier naturel.

Quel est le reste modulo 4 de $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$?

43 Soit n un entier naturel.

1. Déterminer pour tout entier n de $\{0, 1, ..., 6\}$ le reste modulo 7 de 3^n.

2. Montrer que $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7.

3. a. Calculer le reste modulo 7 de 3^{1000}.

b. Quelle est le chiffre des unités de 3^{1000} ?

c. Soit c la somme des diviseurs du nombre 3^{1000}. Quel est le reste modulo 7 de c.

44 Soit a et b deux entiers.

1. Vérifier que, $a^3 \equiv a \pmod{3}$.

2. Montrer les équivalences ci-dessous.

$a^3 - b^3 \equiv 0 \pmod{3}$ équivaut à $a - b \equiv 0 \pmod{3}$.

$a^3 + b^3 \equiv 0 \pmod{3}$ équivaut à $a + b \equiv 0 \pmod{3}$.

$a^3 + 2b^3 \equiv 0 \pmod{3}$ équivaut à $a + 2b \equiv 0 \pmod{3}$.

45 Soit a un entier.

1. Déterminer les restes modulo 11 de a, a^2, a^3.

2. En déduire que $a^3 - b^3 \equiv 0 \pmod{11}$, si et seulement si, $a - b \equiv 0 \pmod{11}$.

46 Soit n un entier naturel non nul.

Montrer par récurrence que,

a. $16^n \equiv 1 - 10n \pmod{25}$,

b. $7^n \equiv 6n + 1 \pmod{36}$,

c. $4^n \equiv 3n + 1 \pmod{9}$,

d. $2^n + 3^n \equiv 5^n \pmod{6}$.